

ŞUBAT AYI MATEMATİK DERGİSİ 2024

GİMATH

HAZIRLAYAN
ÇİGDEM GÖRGÜ
GÜLİN ATILGAN
YETER AYDIN BAYIR

İÇİNDEKİLER

- **Pi Günü**
- **Sanatta Pi**
- **Film Önerimiz**
- **İlginç Bilgiler**
- **İSBN numaralarında ki matematik**
- **Eyfel Kulesinin Matematiği**

14 Mart Pi Günü
Kutlu Olsun

Pi Sayısı



Herkes bilir ki matematikte bir sürü sayı vardır. Hatta bir sürü demek yanlış olur çünkü matematikte sayılar sonsuz sayıdadır. Her ne kadar matematiğin içinde sonsuz sayı olsa da bugün bahsedeceğimiz sayı matematikte ve fizikte önemli yere sahiptir. O zaman gelin ve bu sayıların biriyle başlayalım.

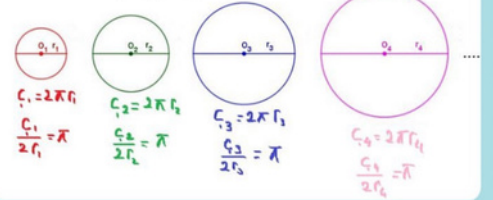
$$\pi = 3,14\dots$$



1

π

$$\text{Çevre} = 2\pi r$$



Pi sayısı ya da Arşimet sabiti olarak bildiğimiz bu irrasyonel sayıyı herhangi bir dairenin çevresini çapına bölerseniz elde edebilirsiniz. Fakat π sadece bundan ibaret bir sayı olsaydı bu sayıyı duymuş olmazdınız.





Pi sayısının özelliklerine gelecek olursak; Pi'nin sonsuza kadar giden bir sayı bütünü olduğunu ve evrendeki hiçbir zekanın veya makinenin Pi'nin bütün rakamlarını



hesaplayamayacağını görürüz.

"İşin mantık kısmı böyle, peki matematiksel kısmı nasıl?"

diyecek olursanız da gelin orayı da beraber anlayalım.



Pi, " $\pi=3.141592653589793...$ " şeklinde devam eder ve bu "devam etme" olayı asla ama asla tekrarlanmaz. Dolayısıyla Pi'nin içinde sizin doğum tarihiniz, telefon şifreniz, söylediğiniz kelimeler, isminiz, soy adınız, kimseye söylemediğiniz sırlarınız, daha doğrusu evrendeki her şey π 'nin içinde saklı. Örneğin siz 1998 doğumlu bir birey olun. Doğum gününüzü π 'nin 29.889'uncu basamağından başlayan ilk dört basamakta bulabilirsiniz.



2

Doğum gününüzün Pi'nin kaçınıcı basamağı olduğunu öğrenmek için <http://mypiday.com/> sitesini kullanabilirsiniz.



Peki bize bu pi sayısının ne kadarı lazım?

Ortaokul ve lise düzeyi için bildiğiniz

üzere genellikle " $\pi=3,14$ " kullanılır.

**Fakat iş büyük çaplı işlere (Uluslararası
Uzay İstasyonu gibi) geldiği zaman bunu
kullanırsanız kafanızı duvara vurursunuz.**

NASA'da çalışan Marc Rayman ise

bu durum için şunu söylüyor:

π sayısının ilk 15 hanesini baz alarak

Voyager 1'den Dünya'nın yerini

hesaplarsanız sadece 3.81 cm

yanılmış olacaksınız.



3,14159265358979



Diyelim ki ilk 5 haneyi

kullanmak istiyorsunuz. Uluslararası Uzay

İstasyonu'nun konumunu Dünya'dan

hesaplarken 3.6 metre sapma olduğunu

görüyoruz. Yani büyük cisimlerde şimdilik

ilk 15 hanesini kullanabiliriz.



3



π

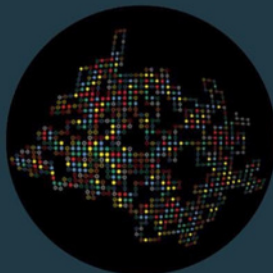
DÜZENSİZLİĞİN EŞSİZ UYUMU

Pi Sanatı

"ŞU GİZEMLİ 3,14159... HER KAPIDAN, PENCEREDEN VE
BACADAN İÇERİ GİRİYOR."
AUGUSTOS DE MORGAN



Evrenin neresinde olursanız olun herhangi bir dairenin çevresini çapına böldüğünüzde meşhur π sayısını elde edersiniz: 3,1415926535... Bu yalnızca ilk 11 basamağı, günümüzde yaklaşık 2 trilyon 700 milyar basamağı hesaplanmış olan π sayısının içinde bir düzen olup olmadığı ise hâlâ ispatlanmış değil.



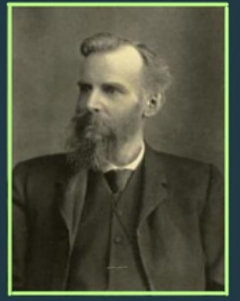
Düzeni hâlâ bulunamayan ve tamamı hesaplanmamış π sayısı, her şeye rağmen hepimizi şaşırtıyor. Matematikçi Steven Strogatz'ın dediği gibi π sayısı tamamen rastlantısal olmakla birlikte mükemmel bir düzene de sahip olmanın inanılmaz çekiciliğine sahip. Peki, ya bu sayıyı görseydik nasıl olurdu? Bu soruyu kendine sormuş olan insanlar π sayısından ilham alarak eserler ortaya çıkarttı. Şimdi bunlara bir göz atalım.



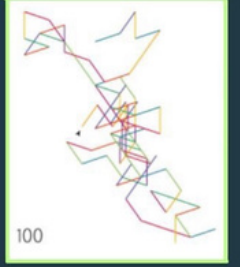
Steven Strogatz



Matematikçi ve filozof John Venn, 1888'de yazdığı "The Logic of Chance" (Şansın Mantığı) kitabında bu konulara girdi ve bir sembolik gösterim öne sürdü. π sayısındaki 0'dan 7'ye kadar olan toplam sekiz rakamın pusuladaki yönleri temsil ettiğini varsaydı. Bu fikirden yola çıkan bir sanatçı ise π sayısının rehberliğinde bir harita çizmeyi denemiş. 0'dan 9'a rakamları renkli bir pusula hâline getirip yola çıkmış. Yanda sonucun bir kısmını görüyorsunuz.

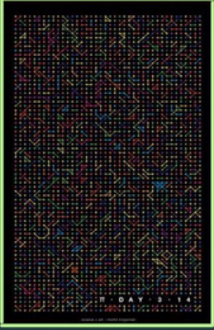


John Venn



100

Bahsettiğimiz görsel



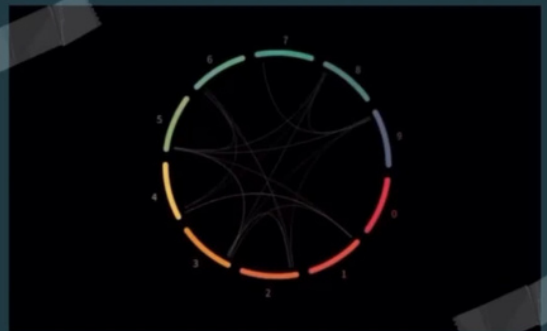
Martin Krywinski ve bir π çalışması



Biyoinformatik, bilgisayar ve istatistik gibi konularda uzman olan Martin Krywinski bu sayı içindeki her rakamı bir sayı ile ilişkilendirmiş, böylece π sayısını sanat eserlerine dönüştürmüştü. İlk çalışmasını sadece renkleri yan yana dizerek bir bütün oluştururken bir diğer çalışmasında renkleri kullanarak onları merkezden dışa doğru genişleyen bir spiral şeklinde dizmiş. Kendisine ait olan web sitesinde çalışmalarının gösteren pek çok güzel içerik bulunuyor.



Cristian Vasile adlı bir başka sanatçı da π 'nin dairesel gösterimleri üzerinde çalışmış. 0 ile 10 arasındaki sayıları bir dairenin etrafına dizmiş. Sonra üçten bire, birden dörde ve devamında da π 'nin diğer basamaklarına göre çizgiler çekmiş. Nasıl yapıldığını aşağıdaki videodan görebilirsiniz.



Başka bir versiyonunda da aynı işlemi tekrar etmiş. Ama bu kez arka arkaya gelen rakamlar olduğunda dairenin çevresine bir nokta koymuş.

Sayı ne kadar çok tekrar etmişse nokta da o kadar büyümüş. En dikkat çekici olan ise üstteki büyük mor nokta. Feynman noktası adını alan o mor nokta 6 tane 9'un yan yana geldiği 762. basamakta karşımıza çıkıyor. Bu da π 'nin içinde bir düzenin olabileceğini bize düşündürüyor.



Bahsedilen görsel



π sayısını duymak isteyen sanatçılar da olmuş ve eserlerinde notalar ile rakamları ilişkilendirerek eşsiz yapıtlar ortaya koymuşlar. 'aSongScout' adlı YouTube kanalında π sayısının ezgisini dinleyebilirsiniz. Ya da daha kolayı, π sayısını tanıttığımız yazımızdan da bir başka π ezgisini dinleyebilirsiniz.



Tüm bu sanat eserleri matematiğin evrenin bir parçası olduğunu kanıtlar nitelikte. π sanatı hiç beklenilmeyen yerlerdeki matematiği görmemize olanak sağlamakla birlikte göz ve kulak zevkimizi besliyor. Düzensizlik içindeki eşsiz düzenle ilerleyen hayatımız ise π sanatının en büyük örneği olma özelliği taşıyor.



6



Gikal 'in Film Önerisi

Batan Güneş Hypatia'nın Film:

AGORA



Film, 4. Yüzyılda Roma İmparatorluğu hâkimiyetindeki İskenderiye'de geçiyor.

Bilinen ilk kadın matematikçi, astronom ve filozof olan Hypatia'nın hayatını anlatan bu film aynı zamanda o dönemde Roma'nın durumunu da içermektedir. Herkes kendi inandığı tanrısını başkalarına da kabul ettirme çabasında olduğu için Hypatia'nın fikirlerini önemsememekte hatta bir dini olmadığı için onu büyücülük ile suçlamaktadır.



Dönemin İskenderiye'si



Hypatia



Bu güçlü ve zeki kadının hikâyesi ise oldukça ilham verici. Günümüzde bile kadın olmak zorken o zor şartlar altında bilimle uğraşmıştır ve her zaman düşüncelerinin arkasında durmayı başarmıştır. En büyük destekçisi ve ilk öğretmeni olan babası Theon sayesinde Atina'da eğitimini tamamladıktan sonra İskenderiye'ye dönmüş ve buradaki okulun başına geçmiştir.



Hypatia ve babası Theon



Kilise Doktoru ilan edilen Kilis ve Orestes arasında çekişme yaşanmaktaydı çünkü Kilis'in asıl amacı siyasi gücü ele geçirmektir ve Vali Orestes'i yenmesi gerekiyordu. Bunu yapabilmek için seçeneklerinden biri Hypatia olmuştur. Hypatia âşık olmasa da onun sonu aşk yüzünden gelmiştir.



Hypatia'nın Ölümü



HYPATIA

Korkunç bir cinayetin planları yapılırken halk arasında Kilis ve Orestes'in dostluğundaki engelin inançsız Hypatia olduğu ve onun yok edilmesi gerektiği konuşmaya başlamıştır. Zamanla cadı ilan edilen Hypatia cahil halk tarafından 45 yaşında öldürüldü.



Hypatia, araştırmalarında Platon, Aristo ve Suda gibi filozofların fikirlerini benimseyip bu bilgiler ışığında doğayı açıklamaya çalışmıştır. Hypatia'nın yazdığı birçok kitap ne yazık ki kütüphanenin yangın ve yağmasında heba olmuştur. Ancak günümüzde biliyoruz ki eğer Hypatia ve babası Theon olmasaydı Ptolomy, Öklid ve diğer Yunanlı matematikçilerin eserleri günümüze ulaşamayacaktı. Güzelliği ve zarafeti sebebiyle pek çok kişi ona âşık olmuştur ancak Hypatia aşkı bir erkekle yaşanacak bir duygu olarak görmüyordu; o bilime, güneşe, yıldızlara âşıktı.



Eu sadece Hypatia'nın değil, bilim dünyasının cinayeti idi çünkü Hypatia'dan sonra 17. yüzyılın ikinci yarısına kadar bu konulara, Descartes, Fermat, Newton, Leibniz gelene kadar, bilim dünyasında değinilmemiştir. Bu durum da ortaya şöyle bir soru çıkartıyor: Hypatia öldürülmeseydi ve İskenderiye Okulu kapanmasaydı insanlık bugünkü uygarlık düzeyine yüzlerce yıl önce kavuşur muydu?



İskenderiye Kütüphanesi'nin tahrip edilmesini gösteren bir tablo



Filmin bir afişi

Filmin yönetmeni Alejandro Amenabar'ın da amacı bunu sorgulatmak. Amenabar, Rachel Weisz'in canlandığı Hypatia'yı öne çıkarsa da asıl isteği din kavramının, şiddet ile birleşip insanlara, bilime, kültüre nasıl zarar verdiğini ortaya çıkarmaktır. Birilerinin bilgiye değer vermemesi yüzünden bin yıllık kayıp yaşanmasını sorgulatmak ve tekrar yaşanmasının önüne geçmek istemiş de diyebiliriz.



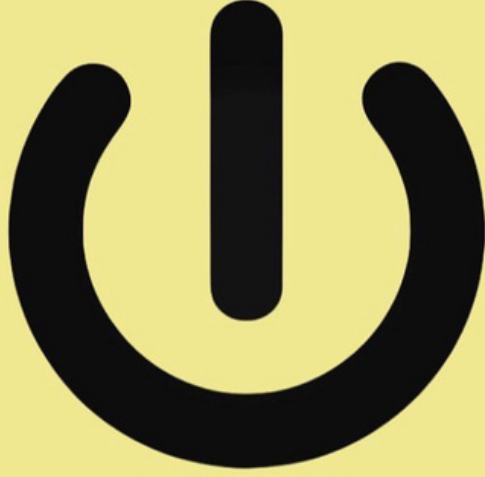
Yaşananlardan tarafsızca herkesin sorumlu tutulması ve bunca kirliliğin arasında bilimi ve saf Hypatia 'yı görmek filmin en sevdiğim özelliklerinden biri. Tabii ki filmin etkileyiciliğinde kurgu da çok etkili. Genel olarak filmi çok sevdim. Umarım Hypatia size de ilham olur ve filmi beğenirsiniz.



İYİ

SEYİRLER





BİLİYOR MUSUNUZ?

Sembolik mantıkta bir önerme doğru ise 1 yanlış ise 0 dir.
Bu tüm açma kapama sistemlerinin çalışma mantığıdır.
Kumandanız veya herhangi bir cihazınızdaki power düğmesindeki sembol sıfırın biraz aralanıp arasına 1 koyulmasıyla belirtilir.



**Bulutlar
sandığımız
kadar hafif
ve yumuşak
değil.**

ASLINDA BİR BULUTUN
KÜTLESİ 80 FİLİN
AĞIRLIĞINA EŞİT.

Kaynakça: <http://iloveuselessknowledge.com/2014/10/22/cumulus-clouds-weigh-about-the-same-as-80-elephants/>

ISBN NÜMARALARININ İÇİNDE YATAN MATEMATİK



İlk önce ISBN numaralarını tanımlamakla başlayalım.



ISBN numaraları (veya Uluslararası Standart Kitap Numarası), kitapları ve kitap benzeri ürünleri tanımlayan 13 basamaklı bir sayıdır. Numara, bir başlığın veya bir başlığın basımının belirli bir yayıncıdan ayırt edilmesi için kullanılır.



Örneğin, aynı kitabın bir e-kitap ve ciltsiz sürümünün her birinin farklı ISBN'leri olacaktır. Bir kitabın kapağını değiştirmek, metin aynı olduğu için yeni bir baskıya neden olmaz.



Ancak tüm kitapların ISBN numarası yoktur. Kitap özel olarak basılmışsa ve kitapçı veya kütüphane dağıtımı için tasarlanmamışsa, ISBN numarasına ihtiyacı yoktur.





Peki, ama bunun
matematikle alakası
nedir?

Acaba bu rakamlar
nasıl belirlenmiştir?



Şimdi bir hesaplama yapıp
bunu birlikte öğreneceğiz.



ISBN-13 numarasının kontrol basamağı şu
şekilde hesaplanır:

• Önceki 12 hanenin her birini 1 veya 3 ile
çarpın (1'den başlayarak dönüşümlü olarak),
yani tek sıradaki basamakları 1 ile çift sıradaki
basamakları 3 ile çarpacaksınız.



• Tüm sayıları toplayın



• Sonucu 10'a bölün ve kalanı hesaplayın



Şimdi bir deneme yapalım.



Örnek olarak bir kitabın ISBN numarası:

978-605-038-083-5 biçiminde.

Buradaki 5 bizim kontrol basamağımız. Yukarıda
bahsi geçen hesaplamayı yaparsak

$$9 \times 1 + 7 \times 3 + 8 \times 1 + 6 \times 3 + 0 \times 1 + 5 \times 3 + 0 \times 1 + 3 \times 3 + 8 \times 1 + 0 \times 3 + 8 \times 3 + 3 \times 1 = 115$$

115 sonucunu elde ederiz. Bu sayıyı da 10'a
böldüğümüz zaman kalanımız 5 olur.



Bir kitabın ISBN numarasını öğrenmek için sorgulama yaparken, ISBN'yi yazarken bir hata yaparsanız, hesaplama sonucu 10'a bölünemeyen bir sayı verecektir ve kitap bulunamayacaktır.



Hermann Minkowski

Kartezyen çarpımında elemanları ifade etmek için kullanılan (x,y) gösterimi ihtiyaçlar doğrultusunda sıralı n-lilerin kullanımına yol açmıştır.



Rene Descartes

Rene Descartes'in varlık felsefesi alanındaki çalışmalarının sonucu ortaya koyduğu Kartezyen düşünce, dualizm (ikircilik) daha sonra Einstein'in tetiklediği ve Minkowski'nin tanımladığı n. boyutta işlem yapılmasına yol açmıştır. Dijital dünya bu pası iyi değerlendirmiş ve barkod sistemi ile gol atmıştır.



Bir kitabın ISBN numarasını öğrenmek için sorgulama yaparken, ISBN'yi yazarken bir hata yaparsanız, hesaplama sonucu 10'a bölünemeyen bir sayı verecektir ve kitap bulunamayacaktır.

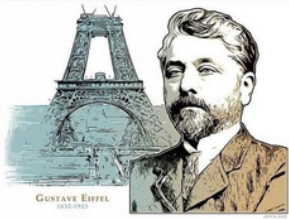


Eiffel Kulesi'nin Matematiği



Fransa'nın gözdesi olan ve dünyaca ünlü yapıt Eiffel Kulesi'ni bilmeyen yoktur. Fakat bu büyük yapıt nasıl inşa edilmiştir hiç düşündünüz mü? Düşünmediyseniz de birazdan bu sorunun cevabını öğreneceksiniz. O zaman Eiffel Kulesi'ne yolculuk başlasın!

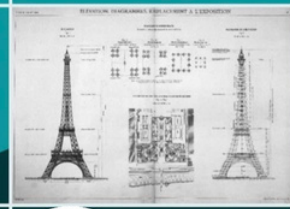
Mimarı aynı zamanda Özgürlük Heykeli'nin de mimarı olan Eiffel Kulesi, ismini inşa ettiren firma olan Gustave Eiffel'den alır. Kule, yılda 6 milyon turist çeker. 2002 yılında toplam ziyaretçi sayısı 200 milyona ulaşmıştır. Eiffel Kulesi 1887 ile 1889 yılları arasında Gustave Eiffel'in firması tarafından, Fransız Devrimi'nin 100. yıl kutlamaları çerçevesinde düzenlenen Expo 1889 Paris Fuarı'nın giriş kapısı olarak inşa edilmiştir.



Her ne kadar Eiffel Kulesi, Gustave Eiffel'in adını taşısa da yapının tasarımı ilk olarak Eiffel'in üç çalışanı tarafından gerçekleştirilmiştir. Ofis müdürü Emile Nouguier, inşaat mühendisi Maurice Koechlin ve mimar Stephen Sauvestre kulenin ilk çizimlerini ve statik hesaplamalarını yapmışlardır. Özellikle Stephen Sauvestre, mimari fikirleri ile yapının şekilsiz bir çelik direk olmaktan çıkıp estetik olarak benzersiz bir yapıya dönüşmesini sağlamıştır.



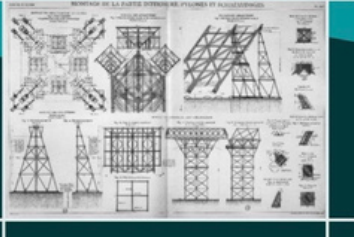
Kulenin, 7.739.401 Frank 31 Sent tutan inşaat masrafları, Gustave Eiffel'in tahminlerinin 1 milyon frank üstündedir. 1889 yılındaki açılış tarihinden önceki 5 ayda 1,9 milyon kişi ziyaret edince, yılsonuna kadar toplam masrafın 3/4'ü çıkartılmıştır. 3.000 işçi, 26 ay boyunca 7,300 ton ağırlığa sahip 18.038 adet demir parçayı 2,5 milyon perçinle bir araya getirmiştir. Bu demir parçalar Eiffel'in Levallois-Perret'de bulunan fabrikasından getirilmiş ve buharlı vinçler kullanılarak kuleye çıkarılmıştır. Hiç ölüm vakası yaşanmamış olması, o günün şartlarında şaşırtıcı bir durumdur.



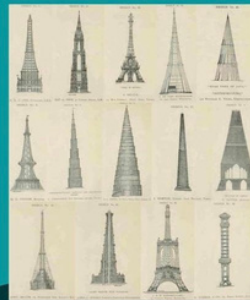
Ancak kule, onu bir utanç lekesi olarak gören Paris halkının tepkisini de çekmiştir. Bazı sanatçılar devasa bir sokak lambasına benzetirken, bazıları bir fabrika bacası gibi Paris'in görsel itibarını zedeleyeceğini ileri sürmüşlerdir. Devrin sanatçı ve edebiyatçı çevresinde kule aleyhine bir kampanya başlatılmış, bu kampanya süresince ünlü sanatçıların imzaladığı bildirimler dağıtılmıştır.



Bugün ise Eiffel Kulesi, Dünya'nın en güzel mimari yapılarından biri olarak kabul edilir. Parisliler onu Demir Bayan olarak adlandırırlar. Kule, şu an 121 yaşında ancak ilk başlarda Eiffel Kulesi sadece 20 yıl için müsaade almıştı. Dolayısıyla, 1909 yılında kulenin sökülmesi gerekiyordu. Ancak kule, iletişim için çok uygun yüksekliğe ulaştığından ve yeni yüzyılda Atlantik ötesi haberleşmeye imkan tanıdığından, kalmasına izin verildi. Bu bağlamda Eiffel Kulesi radyo yayıncılığının gelişmesinde önemli rol oynamıştır. Eiffel Kulesi, radyo dalgalarını çok uzun mesafelere yayabilmesi avantajıyla, I. Dünya Savaşı'nda sinyal kesici ve bozucu olarak da kullanılmıştır.



Eiffel Kulesi, günümüzde Paris'in en çok ziyaret edilen noktası olsa da, en tepedeki 27 metrelik radyo vericisiyle halen bir verici istasyonu olarak kullanılmaktadır. Eiffel Kulesi 300 metre yüksekliktedir. Zirvesindeki televizyon vericileri 27 metre daha yükseklik kazandırır. Kule 57, 115 ve 276 metre yükseklikte bulunan üç adet kamuya açık platforma sahiptir.



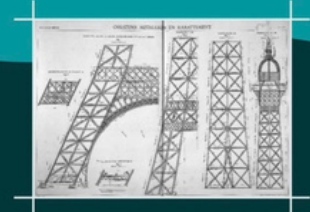
Eiffel Kulesi için alternatif tasarımlar

Günümüzde yaygın olarak kullanılan çelik yerine demirden inşa edilmiş, özel teknikler sayesinde günümüze kadar sağlam olarak gelmiştir. 200.000 metrekare alanda bulunan Eiffel Kulesi her 7 yılda bir, 60 ton boya ile boyanır. Ne çok boya değil mi!

Ek bir bilgi olarak Eiffel Kulesi'nde gece fotoğraf çekmek yasaktır çünkü bu yasak bir nesnenin orijinal yaratıcısına; satış ve dağıtımını, yalnızca yaşadıkları süre boyunca değil, aynı zamanda ölümünden sonraki yıllarda da izin veren Fransız telif hakkı yasasına dayanır.



Telif hakkı söz konusu olduğunda, binalar da tıpkı bir müzede bulacağınız sanat eserleri ile aynı titizlikle sınıflandırılır. Avrupa Birliği'nde telif hakkı yasası, hak sahibinin vefatından 70 yıl sonrasına kadar geçerlidir. Eiffel Kulesi ile ilgili olarak, kulenin telif hakkını elinde bulunduran Gustave Eiffel'di ve kendisi 1923'te öldü. Bu da demek oluyor ki kendisinin telif hakkı kendisinin ölümünden 70 yıl sonra 1993'te bitti. Fakat Eiffel Kulesi üzerindeki ışıklar 1985'te Pierre Bideau tarafından kuruldu, yani ışıkların görüldüğü bir zamanda (yani geceleri) anıtı gösteren herhangi bir fotoğraf veya video, telif hakkı yasasının ihlali anlamına geliyordu. Bu ışıklandırma yapıldıktan sonra telif hakkı süresi 2050 yılına uzadı.



Peki, bu sağlam kulenin yapısında ne gibi bir sır var, nasıl inşa edilmiş?

Gustave Eiffel, kulesini 1889 yılında kurmaya karar verdiğinde büyük bir sorunu vardı: Rüzgâr. Eiffel, rüzgârınçelik yapı üzerindeki etkisini açıklayacak bir formül bilmiyordu. Bu nedenle yapının inşası sırasında çizimler vedeneylerle yetinmek zorunda kalmıştı.

"Kuleyi parça parça inşa etmiş ve tanımı için herhangi bir formüle sahip değildi." diyor Colorado Üniversitesi makine mühendisi Patrick Weidman. Mühendis, Eiffel Kulesi'nin yapısını matematiksel olarak çözdüğüne inanıyor.

Eiffel'in eserine hayran olan Weidman, yapıyı ve yukarı doğru uzanan eğriyi açıklayacak bir formül arıyordu. Matematikçiler bu tür bir denklemin varlığından emindiler. Ancak bunun çok zor olduğu da bilinmekteydi.



Weidman 2001 yılında çizgisel olmayan bir integral formülüne ulaştı. Bu formül bir kulenin biçimini açıklayacak birkaç çözüm getiriyordu. Denklem, diğer bir Eiffel hayranı olan Christophe Chouard tarafından üretilmiş ve yayımlanmıştı.

Weidman hemen hesaplar yaparak çözüme ulaşabileceğine inanmıştı. Onun denklemini aşağı doğru bakan bir parabolü açıklıyordu. Ama ne var ki bunların kavisleri, ünlü yapının biçiminden farklıydı. Ayrıca Weidman, Chouard denklemindeki olası tüm çözümlerin hatalı parabollerle sonuçlandığını veya sonsuzlukta kaybolduklarını da saptadı.

Bu hayal kırıklığından sonra Weidman, Paris'e giderek Louvre'daki tarihi belgeler üzerinde çalışınca, fırtına korkusu dikkatini çeker. "Eiffel, kariyeri boyunca rüzgâr sorunu üzerinde düşünmüştü." diyor bilim adamı.

Eiffel, matematik formülleri yerine sadece deneyimlerine güvenmek zorunda olmasına rağmen yepyeni bir model denemişti. 300 metre yüksekliğindeki metal yapının alt kısmı, normalde rüzgârın basıncını dengeleyen verevine direkler yerine, dört sütunla son derece sağlam bir şekilde inşa edilmiştir.



İşte Weidman bu nedenle kulenin biçimini açıklamak amacıyla alt ve üst kısım için iki ayrı denkleme ihtiyacı olduğunu anladı ve kulenin zarif biçimini açıklayan iki formül 2004 Temmuz'da "Compte Rendu Mécanique" dergisinde yayımlandı. Böylece Eiffel turumuz sona erdi!